全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第三册

数智教辅

全品AI学伴

7×24小时有问必答

高效预复习，吃透每一课

长江出版传媒
崇文書局

CONTENTS 目录 导学案

06 第六章 计数原理 PART SIX

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 …… 107
第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 …… 107
第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的简单应用 …… 109
6.2 排列与组合 …… 111
6.2.1 排列 …… 111
6.2.2 排列数 …… 111
第1课时 排列与排列数 …… 111
第2课时 排列的综合问题 …… 114
6.2.3 组合 …… 116
6.2.4 组合数 …… 116
第1课时 组合与组合数 …… 116
第2课时 组合的综合问题 …… 119
6.3 二项式定理 …… 121
6.3.1 二项式定理 …… 121
6.3.2 二项式系数的性质 …… 122
本章总结提升 …… 125
数学探究 杨辉三角的性质与应用 …… 127

07 第七章 随机变量及其分布 PART SEVEN

7.1 条件概率与全概率公式 …… 130
7.1.1 条件概率 …… 130
第1课时 条件概率与乘法公式 …… 130
第2课时 条件概率的性质及应用 …… 132
7.1.2 全概率公式 …… 133
7.2 离散型随机变量及其分布列 …… 136
7.3 离散型随机变量的数字特征 …… 140
7.3.1 离散型随机变量的均值 …… 140
7.3.2 离散型随机变量的方差 …… 142
7.4 二项分布与超几何分布 …… 145
7.4.1 二项分布 …… 145
第1课时 二项分布 …… 145
第2课时 二项分布的均值与方差及实际应用 …… 147
7.4.2 超几何分布 …… 149
7.5 正态分布 …… 153
本章总结提升 …… 156

08 第八章 成对数据的统计分析 PART EIGHT

8.1 成对数据的统计相关性 …… 160
8.2 一元线性回归模型及其应用 …… 164
第1课时 一元线性回归模型及最小二乘估计 …… 164
第2课时 非线性回归模型 …… 167
8.3 列联表与独立性检验 …… 169
本章总结提升 …… 172

◆ **参考答案**（单独成册） …… 177

第六章　计数原理

6.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第 1 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

【学习目标】

1. 通过实例，理解分类加法计数原理、分步乘法计数原理及其意义.
2. 正确地理解“完成一件事情”的含义，能根据具体问题的特征，选择“分类”或“分步”.
3. 能根据具体问题的特征，选择两种计数原理解决一些实际问题，发展数学建模和数学运算的核心素养.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　分类加法计数原理

定义：完成一件事有_____不同方案，在第 1 类方案中有_____种不同的方法，在第 2 类方案中有_____种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

如果完成一件事情有 n 类不同方案，在第 k 类中有 a_k 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同.　(　)

(2)在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能独立完成这件事.　(　)

◆ 知识点二　分步乘法计数原理

定义：完成一件事需要_____步骤，做第 1 步有_____种不同的方法，做第 2 步有_____种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

如果完成一件事情需要 n 个步骤，做第 k 步有 a_k 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$_____种不同的方法.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分步乘法计数原理中，每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的.　(　)

(2)在分步乘法计数原理中，事情如果是分两步完成的，那么其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事，只有两个步骤都完成后，这件事情才算完成.　(　)

◆ 知识点三　两个计数原理的联系与区别

原理	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
联系	都是解决求完成一件事不同的_____问题，都是对复杂事件的_____	
区别	完成一件事情，共有 n 类方法，关键是“分类”	完成一件事情，共有 n 个步骤，关键是“分步”
	各类方法相互独立	各步之间是相互依存的，缺一不可
	任何一类方法_____这件事	各个步骤都完成_____这件事
	可利用“_____”电路来理解	可利用“_____”电路来理解

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　分类加法计数原理

例 1 (1)家住甲地的小明同学准备周末去乙地旅游，从甲地到乙地一天中动车有 30 个班次，特快列车有 20 个班次，汽车有 40 个班次，则小明乘坐这些交通工具去乙地，不同的方法有_____种.

(2)在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数的个数为_____.

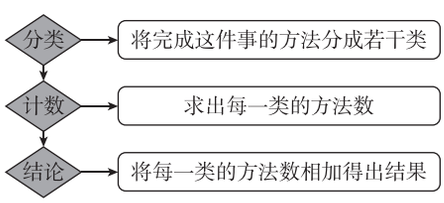
变式 某市的有线电视可以接收中央台 12 个频道、本地台 10 个频道和其他省市 46 个频道的节目.

(1)当这些频道播放的节目互不相同时,一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

(2)如果有 3 个频道正在转播同一场球赛,其余频道正在播放互不相同的节目,一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

[素养小结]

利用分类加法计数原理计数时的解题流程



[提醒] 分类标准的选择应抓住题目中的关键词、关键元素、关键位置.根据题目特点恰当选择一个分类标准.

◆ 探究点二 分步乘法计数原理

例 2 (1)有 7 本不同的书,从中选 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?

(2)有 7 种不同的书(每种不少于 3 本),要买 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?

变式 (1)已知 A 机器中有 7 个娃娃,B 机器中有 8 个娃娃,且这 15 个娃娃互不相同,某人从 A,B 机器中分别抓取 1 个娃娃,则此人抓取娃娃的不同情况共有 (　　)

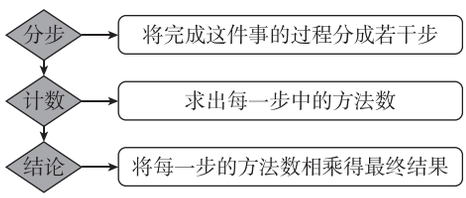
A. 15 种　　B. 30 种

C. 45 种　　D. 56 种

(2)人们习惯把最后一位是 6 的多位数叫作“吉祥数”,则无重复数字的四位“吉祥数”(首位不能是零)共有_____个.

[素养小结]

利用分步乘法计数原理计数时的解题流程



[提醒] (1)要按照事件发生的过程合理分步.

(2)分步时要注意各步骤互相依存,不能遗漏步骤,只有各步骤都完成才算完成这件事.

◆ 探究点三 两个计数原理的简单综合应用

例 3 [教材 P5 例 3] 书架的第 1 层放有 4 本不同的计算机书,第 2 层放有 3 本不同的文艺书,第 3 层放有 2 本不同的体育书.

(1)从书架上任取 1 本书,有多少种不同取法?

(2)从书架的第 1 层、第 2 层、第 3 层各取 1 本书,有多少种不同取法?

变式 某公园休息处东面有 8 个空闲的凳子，西面有 6 个空闲的凳子，小明与爸爸来这里休息.

(1)若小明爸爸任选一个凳子坐下(小明不坐)，有多少种不同的坐法？

(2)若小明与爸爸分别就座，有多少种不同的坐法？

[素养小结]

利用两个计数原理解题时的三个注意点

(1)当题目无从下手时，可考虑要完成的这件事是什么，即怎样做才算完成这件事，然后给出完成这件事的一种或几种方法，从这几种方法中归纳出解题方法.

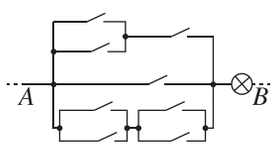
(2)分类时标准要明确，做到不重不漏，有时要恰当画出示意图或树状图，使问题的分析更直观、清楚，便于探索规律.

(3)综合问题一般是先分类再分步.

拓展 某电路图如图所示.

(1)该电路从 A 到 B 只有一条支路接通，共有多少条不同的路径？

(2)合上两个开关接通电路，有多少种不同的方法？



第 2 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理的简单应用

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　选(抽)取与分配问题

例 1 现有 5 幅不同的国画，2 幅不同的油画，7 幅不同的水彩画.

(1)从中任选一幅画布置房间，有多少种不同的选法？

(2)从国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间，有多少种不同的选法？

(3)从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间，有多少种不同的选法？

(4)要从甲、乙、丙 3 幅不同的画中选出 2 幅，分别挂在左、右两边墙上的指定位置，问共有多少种不同的挂法？

变式 高二年级(1)班有 6 人参加数学兴趣小组,(2)班有 5 人参加物理兴趣小组,(3)班有 4 人参加化学兴趣小组.

(1)在参加兴趣小组的人中,选其中 1 人担任三个兴趣小组的大组长,有多少种不同的选法?

(2)在参加兴趣小组的人中,每班选 1 人参加全国数理化竞赛,有多少种不同的选法?

(3)在参加兴趣小组的人中,选取不同组的两人参加相应学科的竞赛,有多少种不同的选法?

[素养小结]

解决抽取(分配)问题的方法

(1)当涉及对象数目不大时,一般选用枚举法、树状图法、框图法或者图表法.

(2)当涉及对象数目较大时,一般有两种方法:

①直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理.一般地,若抽取是有顺序的,则按分步进行;若按对象特征抽取,则按分类进行.

②间接法:去掉限制条件计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

◆ 探究点二　数字组数问题

例 2 [2026·山东青岛国科中学高二月考] 用 0,1,…,9 这十个数字可以组成多少个符合下列条件的数?(结果用数字作答)

(1)三位数;

(2)小于 500 的无重复数字的三位数;

(3)无重复数字的三位奇数.

变式 (1)用 0,1,2,3,4 五个数字可以组成多少个无重复数字且比 2000 大的四位奇数?

(2)用 0,1,2,3,4 五个数字可以组成多少个无重复数字且能被 3 整除的四位数?

[素养小结]

解决组数问题的方法

(1)对于组数问题,一般按特殊位置(一般是末位和首位)优先的方法分类或分步完成;如果正面分类较多,可采用间接法从反面求解.

(2)解决组数问题,应特别注意其限制条件,有些条件是隐藏的,要善于挖掘.组数时,要注意特殊元素、特殊位置优先的原则.

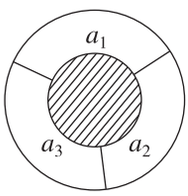
[提醒] 数字“0”不能排在两位数字或两位数字以上的数的最高位.

◆ 探究点三　涂色与种植问题

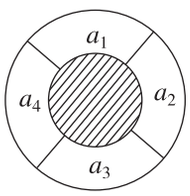
例 3　一个同心圆形花坛分为两部分，中间小圆部分种植草坪和绿色灌木，周围的圆环分为 $n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$ 等份，种植红、黄、蓝三种颜色不同的花，要求相邻两部分种植不同颜色的花.

(1)如图①，圆环分成 3 等份，分别为 a_1,a_2,a_3，则有多少种不同的种植方法？

(2)如图②，圆环分成 4 等份，分别为 a_1,a_2,a_3,a_4，则有多少种不同的种植方法？

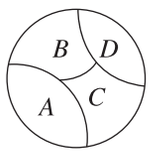


①



②

变式　(1)如图，用 6 种不同的颜色把图中 A,B,C,D 四块区域分开，每个区域涂一种颜色，若相邻区域不能涂同一种颜色，则不同的涂法共有（　　）



A. 400 种　　B. 460 种

C. 480 种　　D. 496 种

(2)[2026·西安三中高二期末] 用 4 种不同的颜色涂在四棱锥的各个面上，要求相邻两面不同色，有_____种不同的涂法.

[素养小结]

求解涂色(种植)问题一般是直接利用两个计数原理求解，常用方法有：

(1)按区域的不同以区域为主分步计数，用分步乘法计数原理分析；

(2)以颜色(种植作物)为主分类讨论，适用于“区域、点、线段”问题，用分类加法计数原理分析；

(3)对于空间中的涂色问题，将空间问题平面化，转化为平面区域涂色问题.

6.2　排列与组合

6.2.1　排列

6.2.2　排列数

第 1 课时　排列与排列数

【学习目标】

1. 通过实例，理解排列的概念，能利用计数原理推导排列数公式.
2. 能正确写出一些简单问题的所有排列.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　排列

(1)排列的定义：一般地，从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素，并按照_____排成一列，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(2)两个排列相同的充要条件：两个排列的_____完全相同，且元素的_____也相同.

注意：(1)m 个元素是不同的.

(2)定义中排列有两个步骤：第一步，先取出 m 个元素；第二步，再按照一定的顺序排成一列(即元素之间与顺序有关). 这与后面的组合是有联系的.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)1,2,3 与 3,2,1 为同一排列.（　　）

(2)在一个排列中，同一个元素不能重复出现.（　　）

(3)从 1,2,3,4 中任选两个数字，就组成一个排列.（　　）

(4)从5名同学中任选2名同学分别参加数学和物理竞赛的所有不同的选法是一个排列问题.(　　)

◆ 知识点二　排列数与排列数公式

排列数定义及表示	把从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有_____,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示
全排列的概念	把 n 个不同的元素_____的一个排列
阶乘的概念	正整数1到 n 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示
排列数公式	$A_n^m=$_____
	阶乘式 $A_n^m=$_____($n,m\in\mathbf{N}^*,m\leqslant n$)
特殊情况	$A_n^n=$_____,$1!=$_____,$0!=$_____

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)从 $n(n\geqslant 2)$ 个人中选出2个人,分别从事两项不同的工作,可以用 A_n^2 表示.(　　)

(2)集合 $P=\{x\mid x=A_4^m,m\in\mathbf{N}^*\}$,则 m 的取值个数是4.(　　)

(3)将8名同学排成两排,每排4人,则不可以用 A_8^8 表示.(　　)

(4)$n!=\dfrac{(n+1)!}{n+1}$.(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　排列的概念

例1-1　判断下列问题是否是排列问题,并说明理由.

(1)从1,2,3,4四个数字中,任选两个做加法,其结果有多少种不同的可能?

(2)从1到10这十个自然数中任取两个不同的数组成直角坐标平面内的点的坐标,可得到多少个不同的点的坐标?

(3)从十名同学中任选两名同学去学校开座谈会,有多少种不同的选取方法?

(4)某商场有四个大门,若从一个大门进去,购买物品后,再从另一个大门出来,不同的出入方式有多少种?

例1-2　从1,2,3,4四个数字中任取两个数字组成没有重复数字的两位数,一共可以组成多少个?(用树状图)

变式　(1)(多选题)[2026·茂名高二期中]下列问题属于排列问题的是(　　)

A. 从6人中选2人分别去游泳和跳绳

B. 从班上30名男生中选出5人组成一个篮球队

C. 从10个不同的质数中取2个数求其商

D. 从5,6,7三个数字中取2个组成一个两位数

(2)从语文书、数学书、英语书、物理书4本书中任意取出3本分给甲、乙、丙三人，每人一本，试将所有不同的分法列举出来.(用树状图)

[素养小结]

判断一个具体问题是否为排列问题，就看它是有序的还是无序的，而检验它是否有序的依据就是变换元素的“位置”(这里的“位置”应视具体问题的性质和条件来决定)，看其结果是否有变化，有变化就是排列问题，无变化就不是排列问题.

◆ 探究点二　排列数公式的计算

角度一　直接利用排列数公式求值

例2 [教材P19例3改编] 计算：(1)A_7^3；(2)A_7^4；(3)$\frac{A_7^7}{A_4^4}$；(4)$A_6^4\times A_2^2$. 比较式子(1)与(3)，写出你的猜想.

变式1 计算：(1)$A_{10}^4=$_____；(2)$A_9^4-A_9^3=$_____；(3)$\frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}=$_____.

变式2 用排列数表示$(55-n)(56-n)\cdots(75-n)(n\in\mathbf{N}^*$且$n<55)=$_____.

角度二　排列数的化简与证明

例3 求解下列问题：

(1)计算：$\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_8^8-A_9^5}$；

(2)求证：$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}(n\geqslant m\geqslant 2)$；

(3)解关于x的不等式$A_8^x<6A_8^{x-2}$.

变式 (1)解方程：$A_{2n}^3=28A_n^2$.

(2)求证：$A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=n^2A_{n-1}^{n-1}$.

[素养小结]

1. 排列数的计算方法

(1)排列数的计算主要是利用排列数公式进行，连续正整数的积可以写成某个排列数；

(2)应用排列数公式的阶乘形式时，一般写出它们的式子后，再提取公因式.

2. 排列数的化简与证明技巧

应用排列数公式可以对含有排列数的式子进行化简和证明，化简的过程中要对排列数进行变形，并要熟悉排列数之间的内在联系.解题时要灵活地运用如下变式：①$n!=n(n-1)!$；②$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$；③$n\cdot n!=(n+1)!-n!$；④$\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$.

[提醒] 在解含有排列数的方程或不等式时，必须注意A_n^m中$m\in\mathbf{N}^*$，$n\in\mathbf{N}^*$且$m\leqslant n$这些限制条件.在解出方程或不等式后，要进行检验，把不合题意的解舍掉.

◆ 探究点三　排列数公式的简单应用

例 4 [2026·福州高二期中] 某算力租赁平台有6种不同型号的AI加速卡，每种仅1张可供租赁.甲、乙、丙3家公司同时从中各租用1张AI加速卡，每张卡只能租给1家公司，则不同的租赁方案的种数为 (　　)

A. 9　　B. 15

C. 18　　D. 120

变式 [2026·江苏扬州中学高二期中] 若把英语单词“math”的字母顺序写错了，则可能出现的错误情况共有 (　　)

A. 24种　　B. 23种

C. 12种　　D. 11种

[素养小结]

解决简单的排列实际应用问题的策略

(1)首先明确要研究的元素是什么，有无顺序.

(2)在处理该问题时是需要分类完成还是分步完成.

第2课时　排列的综合问题

【学习目标】

1. 进一步理解排列的概念，掌握一些排列问题的常用解决方法.
2. 能应用排列知识解决简单的实际问题.

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　排数问题

例 1 用0,1,2,3,4五个数字.

(1)可组成多少个无重复数字的五位数？

(2)可组成多少个无重复数字且是3的倍数的三位数？

(3)可组成多少个无重复数字的五位奇数？

(4)组成没有重复数字的五位数，将这些数由小到大排列，42 130是第几个数？

变式 [2026·哈尔滨雅臣中学高二月考] 用0,1,2,3,4,5这六个数字，能组成多少个符合下列条件的数？(运算结果以数字作答)

(1)无重复数字的四位偶数；

(2)无重复数字且为5的倍数的四位数；

(3)无重复数字且比1230大的四位数.

[素养小结]

数字排列问题的解题原则

排列问题的本质是“元素”占“位置”问题，有限制条件的排列问题的限制条件主要表现在某元素不排在某个位置上，或某个位置不排某些元素.解决该类排列问题的方法主要是按“优先”原则，即优先排特殊元素或优先满足特殊位置，当一个位置安排的元素影响到另一个位置的元素个数时，应分类讨论.

[提醒] 解决数字问题时，应注意题干中的限制条件，恰当地进行分类和分步，尤其注意特殊元素“0”的处理.

◆ 探究点二　排队问题

角度1　“相邻”与“不相邻”问题

例2 有3名男生和4名女生，按照下列不同的要求排队，求不同的排法的种数.

(1)全体站成一排，男生相邻，女生也相邻；

(2)全体站成一排，男生必须排在一起；

(3)全体站成一排，男生不能排在一起；

(4)全体站成一排，男、女生各不相邻.

变式 [2026·天津津南区小站一中高二段考] 从包含甲、乙在内的八人中选四人参加4×100米接力赛，求在下列条件下，分别有多少种不同的排法？(结果用数字作答)

(1)甲、乙两人都被选中且必须跑中间两棒；

(2)甲、乙两人只有一人被选中且不能跑中间两棒；

(3)甲、乙两人都被选中且必须跑相邻两棒；

(4)甲、乙两人都被选中且不能跑相邻两棒.

角度2　“在”与“不在”问题

例3 [2026·商洛洛南中学高二月考] 包含甲、乙在内的六人按下列要求站一横排，分别有多少种不同的站法？

(1)甲不站两端；

(2)甲、乙站在两端；

(3)甲不站最左端，乙不站最右端.

[素养小结]

排队问题的解题策略

(1)合理归类，要将题目大致归类，常见的类型有特殊元素、特殊位置、相邻问题、不相邻问题等，再针对每一类采用相应的方法解题.

(2)恰当结合，排列问题的解决离不开两个计数原理的应用，解题过程中要恰当结合两个计数原理.

(3)正难则反，这是一个基本的数学思想，巧妙应用排除法可起到事半功倍的效果.

拓展 某博物馆新增包括 A，B 在内的 8 件文物，其中 5 件是清朝的，3 件是唐朝的，且 A，B 都是清朝的. 现将这些文物摆成一排，要求 A，B 必须相邻，但唐朝的文物不能相邻，则所有不同的摆法种数为 （ ）

A. 1440　　B. 2160

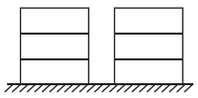
C. 2880　　D. 3050

◆ 探究点三　定序问题

例 4 (1)A，B，C，D，E 五人并排站成一排，如果 B 必须站在 A 的右边(A，B 可以不相邻)，那么不同的排法种数为 _____.

(2)有 6 位同学排成一排准备拍照，拍照前加入了 2 位同学，如果要求他们仍站成一排，同时原来 6 位同学的相对顺序保持不变，则共有 _____ 种不同的站法.

变式 如图所示，某码头有两堆集装箱，一堆 3 个，另一堆也是 3 个，现需要全部装运，每次只能从其中一堆取最上面的一个集装箱，则在装运过程中不同取法的种数是 （ ）



A. 12　　B. 16　　C. 20　　D. 24

[素养小结]

在有些排列问题中，某些元素的前后顺序是确定的(不一定相邻). 解决这类问题的基本方法有两个：

(1)整体法，即若有$(m+n)$个元素排成一列，其中 m 个元素之间的先后顺序确定不变，将这$(m+n)$个元素排成一列，有 A_{m+n}^{m+n} 种不同的排法；然后任取一个排列，固定其他 n 个元素的位置不动，把这 m 个元素交换顺序，有 A_m^m 种排法，其中只有一个排列是我们需要的，因此共有$\dfrac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$种满足条件的不同排法.

(2)插空法，即 m 个元素之间的先后顺序确定不变，因此先排这 m 个元素，只有一种排法，然后把剩下的 n 个元素分类或分步插入由以上 m 个元素形成的空中.

6.2.3　组合

6.2.4　组合数

第 1 课时　组合与组合数

【学习目标】

1. 通过实例，理解组合的概念，能利用计数原理推导组合数公式.
2. 学会运用组合的概念，分析简单的实际问题.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　组合

1. 组合的定义：一般地，从 _____ 个不同元素中取出 _____($m\leqslant n$)个元素 _____，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

2. 排列与组合的异同点：

	排列	组合
相同点	从 n 个不同元素中取出 m($m\leqslant n$)个元素	
不同点	与元素的顺序 _____	与元素的顺序 _____

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)两个组合相同的充要条件是其中的元素完全相同. （ ）

(2)从 a，b，c 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 a，b 或 a，c 或 b，c. （ ）

(3)“从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某两个乡镇的社会调查(每个乡镇去 1 名同学)，有多少种不同的选法”是组合问题. （ ）

(4)“现将 4 枚相同的抗战胜利纪念币送给 10 人中的 4 人留念，有多少种送法”是排列问题. （ ）

2. “abc”与“bca”是相同的排列吗？它们是相同的组合吗？

◆ 知识点二　组合数与组合数公式

组合数定义	从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的_____的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数	
表示法	$C_n^m=$_____	
组合数公式	乘积式	$C_n^m=$_____$=$_____
	阶乘式	$C_n^m=$_____
性质	$C_n^m=$_____，$C_{n+1}^m=$_____	
备注	①$n,m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\leqslant n$；②规定：$C_n^0=1$	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)从 a,b,c 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 C_3^2.　(　)

(2)$C_5^3=5\times4\times3=60$.　(　)

(3)从 1,3,5,7 中任取两个数相乘可得 C_4^2 个积.　(　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　组合的概念

例 1-1　(多选题)下列问题中，属于组合问题的有(　)

A. 从甲、乙、丙、丁 4 名同学中选出 2 名同学分别去参加两项社会实践，有多少种不同的选法

B. 有 4 张同一场次的电影票，要在 7 人中确定 4 人去观看，有多少种不同的选法

C. 某人射击 8 枪，击中 4 枪，有多少种不同的结果

D. 从 2,3,5,7,11 中任选两个数相乘，可以得到多少个不同的积

例 1-2　(1)从 5 个不同的元素 a,b,c,d,e 中取出 2 个，写出所有不同的组合，共有多少个？

(2)从 4 个不同元素 a,b,c,d 中任取 3 个元素，写出所有不同的组合，共有多少个？

变式　[教材 P22 例 5 改编]平面内有 A,B,C,D 四个不同的点，其中任意三个点不共线.

(1)试写出以其中任意两个点为端点的有向线段；

(2)试写出以其中任意两个点为端点的线段；

(3)试写出以其中任意三个点为顶点的三角形.

[素养小结]

(1)区分有无顺序的方法：把问题的一个选择结果写出来，然后交换这个结果中任意两个元素的位置，看是否会产生新的变化，若有新变化，则说明有顺序，是排列问题；若无新变化，则说明无顺序，是组合问题.

(2)利用列举的方法写出从 n 个不同元素中选出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合，常用“顺序后移法”或“树状图法”，这两种方法比较直观，且可以做到不重不漏.

(3)由于组合与顺序无关，故利用“顺序后移法”时箭头应向后逐步推进，且写出的一个组合不可交换位置.如写出 ab 后，不可再交换位置为 ba，因为它们是同一组合.画“树状图”时，应注意顶层及下枝的排列规律，防止重复或遗漏.

◆ 探究点二　利用组合数公式化简、求值与证明

角度一　组合数的计算与化简

例 2　(1)计算：①C_9^7；②$C_7^3-C_6^2$.

(2)解方程：$A_n^3=16C_n^2$.

变式 计算：(1)$3C_8^3-2C_5^2$；

(2)$(C_{100}^2+C_{100}^{97})\div A_{101}^3$；

(3)$C_4^4+C_5^4+C_6^4+C_7^4+C_8^4+C_9^4$.

角度二　组合数有关的证明

例 3 (1)[教材 P25 第 2 题] 求证：$C_n^m=\frac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$.

(2)求证：$C_{m+2}^n=C_m^n+2C_m^{n-1}+C_m^{n-2}$.

变式 证明：$C_n^k\cdot C_{n-k}^{m-k}=C_n^m\cdot C_m^k$.

[素养小结]

进行组合数的相关计算时，应注意以下几点：

(1)像排列数公式一样，公式 $C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 一般用于计算；而公式 $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 及 $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}$ 一般用于证明、解方程(不等式)等.

(2)要注意公式 $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}$ 的逆向运用，可以简化计算过程.

(3)在解决与组合数有关的问题时，要注意隐含条件“$m\leqslant n$ 且 $m,n\in\mathbf{N}^*$”的运用.

◆ 探究点三　组合数的简单应用

例 4 平面上有 9 个点，其中有 4 个点共线，除此外任意 3 点不共线.

(1)经过这 9 个点可确定多少条直线？

(2)以这 9 个点为顶点，可确定多少个三角形？

变式 (1)将 9 名志愿者分为 4 名翻译员、3 名接待员、2 名信息咨询员，则不同的分配方案共有(　　)

A. 315 种　　B. 630 种

C. 1260 种　　D. 2520 种

(2)5 位身高互不相同的同学站成一排照相，要求身高最高的同学站中间，从中间往两边身高依次递减，则不同的站法有_____种.

第2课时　组合的综合问题

【学习目标】

1. 能解决有限制条件的组合问题.
2. 理解组合中的多面手问题、分组分配等问题.

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　有限制条件的组合问题

例1 有男运动员6名，女运动员4名，其中男、女队长各1名.选派5人外出比赛，按下列要求分别有多少种选法？

(1)男运动员3名，女运动员2名；

(2)至少有1名女运动员；

(3)至少有1名队长；

(4)既有队长，又有女运动员.

变式 (1)[2026·福建厦门高二期中] 某班计划从3位男生和4位女生中选出2人参加辩论赛，并且至少有1位女生入选，则不同的选法的种数为（　　）

A. 12　　B. 18

C. 21　　D. 24

(2)[2026·天津武清区英华实验学校高二月考] 中国空间站的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱，假设空间站要安排甲、乙等5名航天员到三个舱内开展实验，每个舱至少安排1名航天员，至多安排2名航天员，则甲、乙不在同一舱的安排方法有_____种.

[素养小结]

组合问题常有以下两类题型：

(1)“含有”或“不含有”某些元素的组合题型：“含”，则先将这些元素取出，再由其他元素补足；“不含”，则先将这些元素剔除，再从剩下的元素中选取.

(2)“至少”或“至多”含有几个元素的题型：当直接法分类复杂时，可采用逆向思维，间接求解.

◆ 探究点二　“多面手”问题

例2 某社区组织体检活动，项目有抽血、彩超、胸透、尿检四项，共有5名医护人员执行任务，每个项目至少需要1名医护人员，且每名医护人员只参与一个项目.其中有3名医护人员四个项目都能胜任，有2名医护人员既不会彩超也不会胸透，其他两个项目都能胜任，则这5名医护人员的不同安排方案有（　　）

A. 36种　　B. 48种

C. 52种　　D. 64种

变式 有11名外语翻译人员，其中5名英语翻译员，4名日语翻译员，另外2名英语、日语都精通，从中找出8人，使他们可以组成2个翻译小组，其中一组4人翻译英语，另外一组4人翻译日语，且这2个小组能同时工作，则这样的8人名单共有多少种？

[素养小结]

多面手问题以元素作为分析对象，可以按照选用几个多面手，多面手做什么建立分类讨论的标准，并且要注意做到不重复不遗漏.

◆ 探究点三　分组、分配问题

角度一　不同元素分组、分配问题

例 3　按下列要求分配 6 本不同的书，分别有多少种不同的分配方法？

(1)分成 3 份，1 份 1 本，1 份 2 本，1 份 3 本；

(2)平均分成 3 份，每份 2 本；

(3)分成 3 份，1 份 4 本，另外 2 份每份 1 本；

(4)甲、乙、丙三人中，一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 3 本；

(5)平均分配给甲、乙、丙三人，每人 2 本；

(6)甲、乙、丙三人中，一人得 4 本，另外两人每人得 1 本；

(7)甲得 1 本，乙得 1 本，丙得 4 本.

变式　[2026 · 浙江嘉兴高二期中]某空间站由 A，B，C 三个舱构成，某次实验需要 5 名宇航员同时在 3 个舱中开展，每个人只能去 1 个舱，每个舱至少安排 1 名宇航员，则不同的安排方法的种数为（　　）

A. 150　　B. 90　　C. 60　　D. 30

角度二　相同元素分组、分配问题

例 4　6 个相同的小球放入 4 个编号为 1，2，3，4 的盒子中，求下列问题中不同的放法的种数.

(1)每个盒子都不空；

(2)恰有 1 个空盒子；

(3)恰有 2 个空盒子.

变式　某校准备参加高中数学联赛，把 16 个选手名额分配到高三年级的 1，2，3，4 四个班，每班至少 1 个名额.

(1)不同的分配方案共有多少种？

(2)若每班名额不少于该班的序号数，则不同的分配方案共有多少种？

[素养小结]

(1)分组问题属于“组合”问题，常见的不同元素的分组问题有三种：

①完全均匀分组，每组的元素个数均相等.

②部分均匀分组，应注意不要重复，有 n 组均匀分组，最后必须除以 $n!$.

③完全非均匀分组，这种分组不考虑重复现象.

(2)相同元素分配问题的处理策略

①隔板法：将放有小球的盒子紧挨着成一行放置，便可看作排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板，相邻两块隔板形成一个“盒”. 每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的一种方法，此法称为隔板法. 隔板法专门解决相同元素的分配问题.

②将 n 个相同的元素分给 m 个不同的对象($n \geqslant m$)，每个对象至少分得一个元素，有 C_{n-1}^{m-1} 种方法. 可描述为 $(n-1)$ 个空中插入 $(m-1)$ 块板.

6.3 二项式定理

6.3.1 二项式定理

【学习目标】

1. 能用多项式运算法则和计数原理证明二项式定理.
2. 掌握二项式定理及二项展开式的通项.
3. 会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 二项式定理及相关概念

二项式定理	$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$
二项展开式	公式右边的多项式
二项式系数	公式右边各项的系数_____
二项展开式的通项	$T_{k+1}=$_____

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)$(a+b)^n$ 的展开式中共有 n 项. ( )

(2)二项式 $(a+b)^n$ 与 $(b+a)^n$ 的展开式的第 $r+1$ 项一定相同. ( )

(3)$C_n^ka^{n-k}b^k$ 是 $(a+b)^n$ 的展开式的第 k 项. ( )

(4)$(a-b)^n$ 与 $(a+b)^n$ 的二项展开式的二项式系数相同. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 二项式定理的正用与逆用

例 1-1 利用二项式定理展开下列各式:

(1)$(a+2b)^5$;

(2)$\left(x-\frac{1}{x}\right)^7$.

例 1-2 (1)设 $A=3^7+C_7^2\times3^5+C_7^4\times3^3+C_7^6\times3$,$B=C_7^1\times3^6+C_7^3\times3^4+C_7^5\times3^2+1$,则 $A-B$ 的值为 ( )

A. 128 B. 129 C. 4^7 D. 0

(2)若对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$(ax+b)^5=(x+2)^5-5(x+2)^4+10(x+2)^3-10(x+2)^2+5(x+2)-1$ 恒成立,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a+b=$ ( )

A. -1 B. 0

C. 1 D. 2

[素养小结]

二项式定理的双向功能:

(1)正用:将二项式 $(a+b)^n$ 展开,得到一个多项式,即二项式定理从左到右使用是展开.对较复杂的式子,先化简再用二项式定理展开.

(2)逆用:将多项式合并成二项式 $(a+b)^n$ 的形式,即二项式定理从右到左使用是合并.对于化简、求和、证明等问题的求解,要熟悉公式的特点、项数、各项幂指数的规律以及各项系数的规律.

◆ 探究点二 二项式系数与项的系数

例 2 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 的展开式中,求:

(1)展开式的第 4 项的二项式系数及第 4 项的系数;

(2)展开式中含 x^2 的项的系数.